OPÉRATEUR GRADIENT

Coordonnées	$\vec{\mathrm{grad}}\, f$ (ou $\vec{\nabla} f$) tel que $\mathrm{d}f = \vec{\mathrm{grad}}\ f \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$
Cartésiennes	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Cylindriques	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Sphériques	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

OPÉRATEUR DIVERGENCE

Coordonnées	$\mathrm{div}\vec{A}$ (ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$) tel que $\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$
Cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

Astuce : en coordonnées cartésiennes (uniquement !), la divergence s'obtient formellement par le « produit scalaire », en notant $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ et de même pour les autres coordonnées y et z :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= (\partial_x,\partial_y,\partial_z)\cdot(A_x,A_y,A_z) = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

OPÉRATEUR ROTATIONNEL

Coordonnées	$\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}$ (ou $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$) tel que $\oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$
Cartésiennes	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$
Cylindriques	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$
Sphériques	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$

Astuce : en coordonnées cartésiennes (uniquement !), l'opérateur rotationnel s'obtient formellement par le « produit vectoriel » :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

OPÉRATEUR DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR

Coordonnées	**Opérateur** $(\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{B}$
Cartésiennes	$(\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{grad}})B_x\vec{e}_x + (\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{grad}})B_y\vec{e}_y + (\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{grad}})B_z\vec{e}_z$ $= \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \ldots$

LAPLACIEN SCALAIRE

Coordonnées	$\Delta f = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{\nabla}^2 f$
Cartésiennes	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Cylindriques	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Sphériques	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Remarque : Le premier terme de l'expression en coordonnées sphériques s'écrit aussi $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2}$.

LAPLACIEN VECTEUR

Coordonnées	**Opérateur** $\vec{\Delta}\vec{A}$ ou $\Delta\vec{A}$
Cartésiennes	$\Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$
Autres	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A})$

IDENTITÉS DIFFÉRENTIELLES

$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}$

DÉVELOPPEMENTS

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f g) = f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$
$\mathrm{div}\,(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\vec{A}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{A}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$
$\mathrm{div}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$